Ecole Nationale POlytechnique d'Oran

2^{e} Année Classes Préparatoires en Sciences & Technologie

ANALYSE IV

TD n° 1

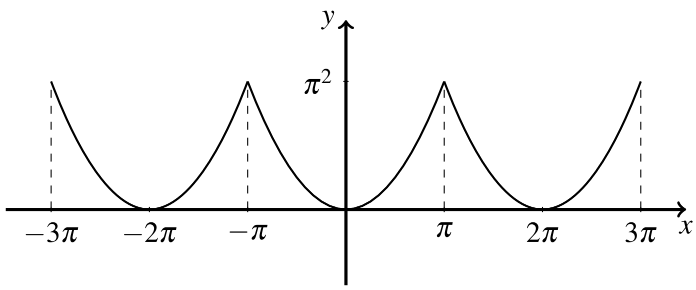
Abdallah Talhaoui

Séries de Fourier

Exercise 0.1 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f, $2\pi-$périodique telle que $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.
En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Solution :
Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.



On remarque que la fonction f est paire, alors $b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx$$

En utilisant l'intégration par partie deux fois, on obtient

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

D'autre part, on a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier associée à f est convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

est définie par

$$S_f(x) = \frac{1}{2} \left(f(x+0) + f(x-0) \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$S_f(x) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier lorsque $x = \pi$, on obtient $f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ d'où l'on tire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

De même si $x=0$, on a $f(0)=0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, on en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

En appliquant l'égalité de Parseval, on obtient

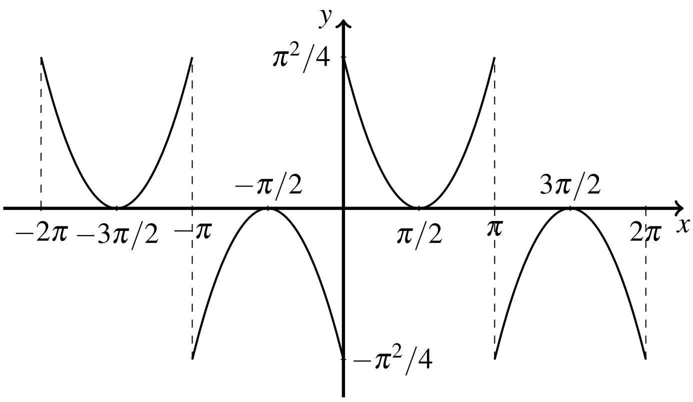
$$\frac{\pi^4}{9}+8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^4dx=\frac{\pi^4}{5}.$$

On déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

Exercise 0.2 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f impaire, $2\pi-$périodique définie sur $[0,\pi[$ par $f(x)=(x-\frac{\pi}{2})^2$.
En déduire la relation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^2}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Solution :
Soit f la fonction impaire, $2\pi-$périodique définie sur $[0,\pi[$ par $f(x)=(x-\frac{\pi}{2})^2$.



La fonction f étant impaire, on doit avoir $a_n=0,\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

Si $n\in\mathbb{N}^*$, en utilisant l'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\sin(nx)dx\\&=\frac{2}{\pi}\left[-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\cos(nx)}{n}+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{2\sin(nx)}{n^2}+\frac{2\cos(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{2}{\pi}\left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{\pi^2}{4n}-\frac{2}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Les termes de rang pair étant nuls, la série de Fourier associée à f est donnée par

$$S_f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi^2}{4(2k+1)}-\frac{2}{(2k+1)^3}\right)\sin(2k+1)x.$$

qui converge sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet.

Comme f est continue en $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$S_f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi^2}{4(2k+1)} - \frac{2}{(2k+1)^3}\right)$$

d'où la relation

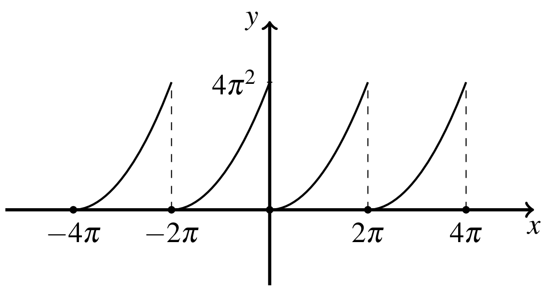
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^2}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Exercise 0.3 (a) Calculer la série de Fourier de la fonction f, $2\pi-$périodique définie sur $[0,2\pi[$ par $f(x) = x^2$.

(b) Étudier la convergence de la série de Fourier associée à f.

(c) Déduire la somme suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Solution :
Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie sur $[0,2\pi[$ par $f(x) = x^2$.



(a) La série de Fourier $\sum a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ associée à f peut s'écrire sous forme complexe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$, avec $a_0 = c_0$, et pour tout $n \geq 1$

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n}, \\ b_n = i(c_n - c_{-n}). \end{cases}$$

On a pour tout $n \geq 1$, $\quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 e^{-inx}dx.$

En utilisant l'intégration par partie, il vient que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-x^2\frac{e^{-inx}}{in}\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{in}\int_0^{2\pi} xe^{-inx}dx\right) \\ &= -\frac{2\pi}{in} + \frac{1}{i\pi n}\int_0^{2\pi} xe^{-inx}dx \\ &= -\frac{2\pi}{in} + \frac{1}{i\pi n}\left(\left[-x\frac{e^{-inx}}{in}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} e^{-inx}dx\right) \\ &= -\frac{2\pi}{in} + \frac{1}{i\pi n}\left(-\frac{2\pi}{in} - \frac{1}{(in)^2}\left[e^{-inx}\right]_0^{2\pi}\right) \\ &= -\frac{2\pi}{in} + \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3}.$$

On déduit que

$$a_0 = \frac{4\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4}{n^2}, \quad b_n = -\frac{4\pi}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

D'où la série de Fourier associée à f :

$$S_f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right).$$

(b) D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier associée à f est convergente sur $\mathbb{R}$, en particulier $S_f(x)$ est définie sur $[0,2\pi[$ par

$$S_f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in]0,2\pi[, \\ 2\pi^2 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

R La fonction somme n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.

(c) Si $x = 0$, on a

$$S_f(0) = 2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

d'où l'on tire

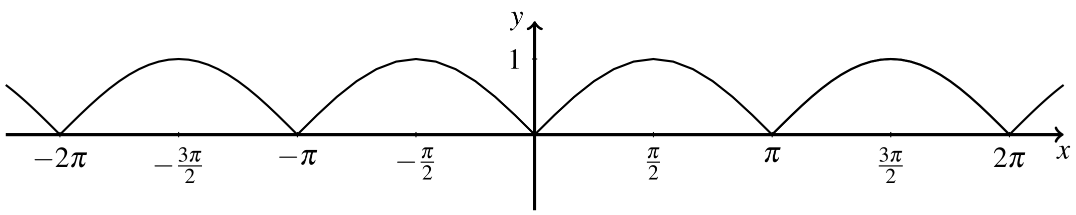
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercise 0.4 Trouver les coefficients de Fourier de la fonction f, $2\pi-$périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = |\sin x|$.
En déduire le sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Solution :

$g(x) = |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}$



La fonction f étant paire, on doit avoir $b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} \qquad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0.$$

En remarquant que les coefficients de de rang impair sont nuls, il vient que

$$a_{2k} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2-1}, \qquad \forall k \geq 1.$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet entraine que

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos(2kx), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En posant $x = 0, \frac{\pi}{2}$ respectivement, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

En appliquant la formule de Parseval, on a

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2},$$

d'où l'on déduit que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

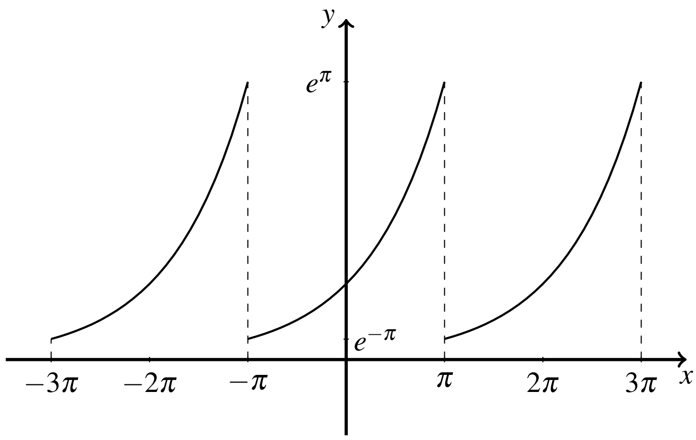
Exercise 0.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique telle que $f(x) = e^x$ si $x \in]-\pi, \pi[$.

(a) Montrer que f est développable en série de Fourier.
(b) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
(c) Étudier la convergence de la série de Fourier.
(d) En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Solution :

Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie sur $]-\pi,\pi[$, par $f(x)=e^x$.



(a) Comme f est $2\pi-$périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$, alors f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

(b) Nous allons calculer les coefficients de la série de Fourier complexe de f.
On a pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}}{1-in}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1-in}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1-in}. \end{aligned}$$

(c) D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier complexe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ associée à f est convergente simplement sur $\mathbb{R}$, et sa somme $S_f(x)$ est définie par

$$S_f(x)=\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right), \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

En particulier on a

$$\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x\in]-\pi,\pi[, \\ \operatorname{ch}\pi & \text{si} \quad x=\pm\pi. \end{cases}$$

R La fonction somme n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.

(d)

- Pour $x = 0$, on obtient

$$1 = \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\mathrm{sh}\pi} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} \right) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2},$$

d'où l'on tire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\mathrm{sh}\pi} + 1 \right).$$

- Pour $x = \pi$, on obtient

$$\mathrm{ch}\pi = \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\mathrm{th}\pi} = 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-in} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2},$$

d'où l'on tire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\mathrm{th}\pi} + 1 \right).$$