Transformée de Fourier (suite et fin)

Mme. Ghamnia*

16 avril 2020

1 Sinus et Cosinus-tranformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ absolument intégrable sur l'ensemble des réels :

1) On appelle **Sinus-transformée de Fourier** de la fonction f , la fonction définie par :

$$\mathcal{F}_s(f)(\alpha) = \hat{f}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x)\, dx.$$

Sa transformée inverse (dite inverse de sinus-transformée de Fourier) est donnée par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\alpha) \sin(\alpha x)\, d\alpha.$$

2) On appelle **Cosinus-transformée de Fourier** de la fonction f , la fonction définie par :

$$\mathcal{F}_c(f)(\alpha) = \hat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x)\, dx.$$

Sa transformée inverse (dite inverse de cosinus-transformée de Fourier) est donnée par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\alpha) \sin(\alpha x)\, d\alpha.$$

Remarque 1.1 *1) Si f est une fonction paire alors :*

$$\hat{f}(\alpha) = \mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x)\, dx.$$

2) Si f est une fonction impaire alors :

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = -i\hat{f}_s(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x)\, dx.$$

*ENPO-MA, BP 1523 El Ménaouer, 31000 Oran, Algérie

et donc :

$$\hat{f}_s(\alpha) = i\hat{f}(\alpha)$$

2 Produit de Convolution

2.1 Définition :

Soient f et g deux fonctions de : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrables sur $\mathbb{R}$; On appelle produit de convolution de f par g, la fonction notée $f * g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt$$

Remarque 2.1 *Le produit de convolution est commutatif :*

2.2 Transformée de Fourier et produit de convolution :

On a :

$$\mathcal{F}(f * g)(\alpha) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\alpha).\mathcal{F}(g)(\alpha)$$

3 Égalité de Parseval :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ admettant une transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$. Alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f(x)(\alpha)|^2\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx$$

Exemple 3.1 *Retrouver le résultat de la question N°2 de l'exercice 1 de la fiche de TD.*