Exercice 3 (séries de Fourier)

La fonction $f(x) = x^2$ n'est ni paire ni impaire sur $[0, 2\pi]$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx == \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{4}{n^2}$$

On a utilisé deux fois l'intégration par parties

De même pour le calcul de b_n (On utilise deux fois l'intégration par parties)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx)\, dx = -\frac{4\pi}{n}$$

Donc

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{n^2} - \frac{\pi \sin(nx)}{n}\right) \qquad (*)$$

La fonction f est 2π –périodique, continue sur est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$(elle vérifie les conditions de Direchlet). Donc la série de Fourier associée à f converge en tout x vers

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \begin{cases} f(x) & x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2\pi^2 & x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Calcul de la série $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

On pose $x = 0 \quad (point\ de\ discontinuité)$, dans $(*)$, on aura

$$\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = 2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$