Ecole Nationale POlytechnique d'Oran

2$^{e}$ Année Classes Préparatoires en Sciences & Technologie

# ANALYSE IV

## TD n° 1

Abdallah Talhaoui

# Séries de Fourier

**Exercise 0.1** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f$, $2\pi-$périodique telle que $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.
En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

■

**Exercise 0.2** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f$ impaire, $2\pi-$périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = (x - \frac{\pi}{2})^2$.
En déduire la relation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

■

**Exercise 0.3**
(a) Calculer la série de Fourier de la fonction $f$, $2\pi-$périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x^2$.
(b) Étudier la convergence de la série de Fourier associée à $f$.
(c) Déduire la somme suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

■

**Exercise 0.4** Trouver les coefficients de Fourier de la fonction $f$, $2\pi-$périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |\sin x|$.
En déduire le sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

■

**Exercise 0.5** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique telle que $f(x) = e^x$ si $x \in ]-\pi, \pi[$.
(a) Montrer que $f$ est développable en série de Fourier.
(b) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f$.
(c) Étudier la convergence de la série de Fourier.
(d) En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

■