

The background features a large, semi-transparent sphere on the left side, with several smaller, similar spheres scattered across the scene. The bottom portion of the image is dominated by a large, metallic-looking geometric shape, possibly a stylized letter 'A' or a similar structure, with a circular cutout. The overall color palette is muted, consisting of light beige, grey, and soft blue tones.

**Ecole Nationale POlytechnique d'Oran**  
**2<sup>e</sup> Année Classes Préparatoires en Sciences & Technologie**

# **ANALYSE IV**

## **TD n° 1**

**Abdallah Talhaoui**







**Exercice 0.1** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = x^2$  sur  $[-\pi, \pi]$ .

En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

**Exercice 0.2** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  impaire,  $2\pi$ -périodique définie sur  $[0, \pi]$  par  $f(x) = (x - \frac{\pi}{2})^2$ .

En déduire la relation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

**Exercice 0.3** (a) Calculer la série de Fourier de la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique définie sur  $[0, 2\pi]$  par  $f(x) = x^2$ .

(b) Étudier la convergence de la série de Fourier associée à  $f$ .

(c) Déduire la somme suivante :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 0.4** Trouver les coefficients de Fourier de la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi]$  par  $f(x) = |\sin x|$ .

En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

**Exercice 0.5** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = e^x$  si  $x \in ]-\pi, \pi[$ .

(a) Montrer que  $f$  est développable en série de Fourier.

(b) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f$ .

(c) Étudier la convergence de la série de Fourier.

(d) En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$