Transformée de Fourier (suite)

Mme. Ghamnia[*]

12 avril 2020

Correction de l'exercice 1 du TD :

1. $$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

   Comme Π est paire, on a :

   $$\hat{\Pi}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \Pi(x) cos(\alpha x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2} cos(\alpha x)\, dx$$

   Si $\alpha \neq 0$ alors : $\hat{\Pi}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{sin\alpha x}{\alpha}\right]_0^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}$

   Si $\alpha = 0$ alors : $\hat{\Pi}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

   Comme :

   $$\lim_{\alpha \to 0} \hat{\Pi}(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin\frac{1}{2}\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \hat{\Pi}(0)$$

   alors $\hat{\Pi}$ est prolongeable par continuité en 0 ; et on peut écrire :

   $$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \hat{\Pi}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}.$$

2. La transformée inverse de Fourier nous permet d'écrire :

   $$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Pi}(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Pi}(\alpha)(\cos \alpha x + i \sin \alpha x)\, d\alpha$$

[*]ENPO-MA, BP 1523 El Ménaouer, 31000 Oran, Algérie

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha x}{\alpha} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha x}{\alpha}\, d\alpha\right]$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on aura :

$$\frac{\Pi(1^+) + \Pi(1^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{\alpha} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}\, d\alpha\right]$$

Comme $\alpha \longmapsto \dfrac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}$ est impaire alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}\, d\alpha = 0$$

et donc :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

Par intégration par partie :

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\alpha} \Longrightarrow du = \dfrac{-1}{\alpha^2}\, d\alpha \\ dv = \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\, d\alpha \Longrightarrow v = \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\sin^2\frac{t}{2} - \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{t}\sin^2\frac{t}{2}\right] + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}\, d\alpha \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} \blacksquare$$

Ce qui nous donne, en posant $x = \alpha/2$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \pi$$

1 Dérivée de la Transformée de Fourier

Théorème 1.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. *$f \in \mathcal{H}$*
2. *l'opérateur $Pf \in \mathcal{H}$ tel que Pf est défini par $(Pf)(x) = xf(x)$*
3. *f est continue.*

Alors $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et on a :

$$\mathcal{F}'(f(x))(\alpha) = (\hat{f})'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\, dx.$$

En dérivant sous le signe somme (intégrale), on obtient :

$$\mathcal{F}'(f)(\alpha) = (\hat{f})'(\alpha) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i\alpha x}\, dx = -i\mathcal{F}(Pf)(\alpha) = -i\hat{P}f(\alpha).$$

Remarque 1.1 [Dérivées successives de la TF]

Plus généralement, on a :

$$\mathcal{F}^{(m)}(f)(\alpha) = (-i)^{(m)}\mathcal{F}(Pf)(\alpha).$$

2 Transformée de Fourier de la dérivée

Théorème 2.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. $f \in \mathcal{H}$
2. $f \in C^1(\mathbb{R})$
3. $df \in \mathcal{H}$.

Alors $f \in C_0$ et

$$\mathcal{F}(f')(\alpha) = i\alpha\mathcal{F}(f)(\alpha)$$

Indication pour la démonstration :

$$\mathcal{F}(f')(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\alpha x}\, dx,$$

une intégration par partie, sachant que $f \in C_0$, nous donne le résultat.

Remarque 2.1 [TF de la dérivée m-ième]
Plus, généralement pour la dérivée d'ordre m, nous avons :

$$\mathcal{F}(f^{(m)})(\alpha) = (i\alpha)^{(m)}\mathcal{F}(f)(\alpha)$$

3 Quelques propriétés de la transformée de Fourier

3.1 Linéarité :

L'intégration étant une opération linéaire alors la transformée de Fourier l'est aussi, c'est à dire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in \mathcal{H} : \qquad \mathcal{F}(\lambda f + \mu g)(\alpha) = \lambda\mathcal{F}(f)(\alpha) + \mu\mathcal{F}(g)(\alpha)$$

3.1.1 TF de la translation :

Soit $T \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On note $f_T(x) = f(x-T)$. Si $f \in \mathcal{H}$, nous avons :

$$\mathcal{F}(f_T)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x)e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-T)e^{-i\alpha x}\, dx,$$

Posons $t = x - T$, alors :

$$\mathcal{F}(f_T)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(t+T)\alpha}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\alpha}e^{-iT\alpha}\, dt = \frac{e^{-iT\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\alpha}\, dt.$$

Donc :

$$\mathcal{F}(f_T)(\alpha) = e^{-iT\alpha}\mathcal{F}(f)(\alpha)$$

3.2 TF de l'homothétie :

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On note $f_k(x) = f(kx)$. Si $f \in \mathcal{H}$, nous avons :

$$\mathcal{F}(f_k)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(kx)e^{-i\alpha x}\, dx,$$

Posons $t = kx$, alors :

$$\mathcal{F}(f_k)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha(t/k)}\, \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it(\alpha/k)}\, dt\right] = \frac{1}{k}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\alpha}{k}\right).$$

Donc :

$$\mathcal{F}(f_k)(\alpha) = \frac{1}{k}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\alpha}{k}\right).$$

3.3 Modulation :

Inversemant, la transformée de Fourier de la fonction $x \longmapsto e^{i\alpha_0 x}f(x)$ (avec α_0 réel) est donnée par :

$$\mathcal{F}(e^{i\alpha_0 x}f(x))(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha_0 x}f(x)e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(\alpha-\alpha_0)x}\, dx = \mathcal{F}(f(x))(\alpha-\alpha_0).$$

Devoir :
Faire l'exercice 2 de la fiche de TD et le rendre avant le 19/04/2020.